

東吳大學 105 學年度轉學生(含進修學士班轉學生)招生考試試題

第 1 頁, 共 1 頁

系級	物理學系二年級	考試時間	100 分鐘
科目	微積分	本科總分	100 分

1. (40 分, 每小題 10 分) 設  $f(x, y) = xy$ ,  $x(t) = \cos t$ ,  $y(t) = \sin t$ ,  $g(t) = f(x(t), y(t))$ ,  $t \in (-\infty, \infty)$

- (i) (the gradient vector field of  $f$ )  $\vec{\nabla}f(x, y) = ?$  畫幾條  $f$  的等高線與一些在其上之  $\vec{\nabla}f$ .
- (ii) (the differential)  $df = ?$  (用  $dx, dy$  回答); 用 chain rule 計算出  $dg = ?$  (用  $dt$  回答)
- (iii) 令  $C = \{(x(t), y(t)) \mid t \in (-\infty, \infty)\}$ , 求  $(x_0, y_0) \in C$  滿足: 在  $(x_0, y_0)$ ,  $f$  之等高線與  $C$  相切.
- (iv)  $g$  可視為在  $C$  上之函數, 則  $g$  在  $(x_0, y_0)$  是否有極值? Why?

2. (30 分, 每小題 10 分)

- (i)  $\frac{1}{1-x}$  對  $x=0$  展開的 Taylor series 為何? 此 Taylor series 之收斂半徑為?
- (ii)  $\arctan x$  對  $x=0$  展開的 Taylor series 為何?
- (iii) 由(ii)求  $\pi$  之近似值, 並估計誤差.

3. (10 分)  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = ?$  (需有計算過程)

4. (20 分) 設  $c$  為  $f$  在  $(a, b)$  的 critical point (臨界點), 且  $f''(c) > 0$ .

- (i) 說明  $f''(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(c+h)}{h}$ .
- (ii) 用 (i) 說明存在一開區間  $(c-\delta, c+\delta) \subset (a, b)$ ,  $\delta > 0$ , 滿足  $f'(x) < 0$ ,  $x \in (c-\delta, c)$  且  $f'(x) > 0$ ,  $x \in (c, c+\delta)$ .