東吳大學107學年度暑假轉學生招生考試試題

系級	數學系三年級	考試時間	100 分鐘
科目	線性代數	本科總分	100 分

1. (5%)若矩陣 A, B 可逆且 $AB = BA$，請證明 $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2. (10%) 利用 Cramer 法則解方程式組

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 = 1 \\ 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

3. (1) (5%)求矩陣 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$的反矩陣。

(2) (5%)求矩陣 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix}$的反矩陣。

4.(10%)令 B=$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 8 & 9 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$找出 null space of B.

5. (10%)

令 $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix}$

(1) 請證明 A,B 為線性獨立或相依
(2) 請問 C 是否為 A, B 的線性組合，請說明。

6. (10%) 令 $K = R^2, A = \{(x, x) | x \in R\}, B = \{(0, y) | y \in R\}$, 證明 $K = A \oplus B$

7. (10%) 令 $T: R^2 \to R^2$ 為線性，定義 $T(x, y) = (2y - x, 3x)$ 且 $U: R^2 \to R^2$ 為線性，滿足 $U(1,2) = (3,3), U(1,1) = (1,3)$ 請證明 T=U.

8. (10%) 已知 $T: R^2 \to R^3$為線性轉換，$T(1,1) = (1,0,2), T(2,3) = (1,-1,4)$, 求 $T(8,11)$

東吳大學 107 學年度暑假轉學生招生考試試題

系級	數學系三年級	考試時間	100 分鐘
科目	線性代數	本科總分	100 分

9. (5%) $T: \mathrm{R}^2 \rightarrow R^2$ 為 $\mathrm{T(x,y)} = (\mathrm{x}+\mathrm{y}, 2\mathrm{x}), \mathrm{B} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$為標準有序基底，
求 $[\mathrm{T}]_{\mathrm{B}} = ?$

10. (10%) 令

$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ 為線性轉換，其對應之基底為 $\left\{ \mathrm{b1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathrm{b2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, 請找出其轉換基底為 $\left\{ \mathrm{b1}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathrm{b2}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ 之 T^*
線性轉換。

11. (10%) 求矩陣$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 4 & -1 & -5 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ 之 eigenvalues 和 eigenvectors.