

東吳大學 108 學年度碩士班研究生招生考試試題

第 1 頁，共 1 頁

系級	數學系碩士班 A 組(數學)	考試時間	100 分鐘
科目	線性代數	本科總分	100 分

1. (15%) 令 $A = \begin{bmatrix} \gamma & 1 & 0 \\ 0 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$, 求 (1) A^2 (2) A^4 (3) A^n

2. (10%) 設 n 維向量 $\beta = \left(\frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2}\right)$, $A = I - \beta^T \beta$, $B = I + 2\beta^T \beta$, 求 AB

3. (10%) 設 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 求 A^{-1}

4. (10%) 求解矩陣方程式 $AX = B$ 其中 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

5. (10%)

$r_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $r_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $r_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$ 試判斷 r_4 是否為 r_1, r_2, r_3

的現性組合。若是請求出組合系數。

6. (10%) 證明如果 r_1, r_2, r_3 可由 β_1, β_2 線性表示，則 r_1, r_2, r_3 線性相關。

7. 設 $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (0, 1, 2)$, $a_3 = (2, 0, 3)$ 是 \mathbb{R}^3 的一個向量組。

(1) (5%) 證明 a_1, a_2, a_3 為 \mathbb{R}^3 的一組基底。

(2) (10%) 利用 Gram-Schmidt 正交化過程將之化為單位正交基底

8. (20%) 求矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -a-2 & 2a \end{bmatrix}$ 的 eigenvalues 和 eigenvectors.