

# 捕食者與被捕食者模型之數值模擬

組員：林羿君、廖唯廷  
指導教授：林惠婷教授

前言:在日常生活中，大自然的萬物與我們人類密不可分，生物鏈的循環也不例外，所以我們希望能夠藉由假設實驗進行模擬實際的田野調查，觀察以及記錄山貓與野兔存活的數量，再透過捕食者與被捕食者之微分方程模型去探討實驗數據，並且將這些資訊經由數學軟體運算，得到結果以便對未來的數量進行預測。

## Process

製作數張1x1的紙牌當作野兔、3x3的紙當作山貓，並在12x12的範圍內進行實驗，每隻野兔會在下一代產生一隻，每隻山貓必須吃到三隻野兔才能存活並且產生一隻子代，此外當山貓剩下零隻時補一隻進去、野兔剩下零隻時補三隻進去，以此類推，進行實驗。

Generation of Hares	Number of Lynx	Number of Hares	Hares Eaten(total)	Hares Remaining	Lynx Starved	Lynx Surviving	Lynx offspring
1	1	3	1	2	1	0	0
2	1	4	1	3	1	0	0
3	1	6	1	5	1	0	0
4	1	10	1	9	1	0	0
5	1	18	1	17	1	0	0
6	1	34	3	31	0	1	1
7	2	62	10	52	0	2	2
8	4	104	36	68	0	4	4
9	8	136	74	62	0	8	8
10	16	124	112	12	0	16	16
11	32	24	24	0	30	2	2
12	4	3	3	0	4	0	0
13	1	3	1	2	1	0	0
14	1	4	1	3	1	0	0
15	1	6	1	5	1	0	0
16	1	10	1	9	1	0	0
17	1	18	2	16	1	0	0
18	1	32	4	28	0	1	1
19	2	56	10	46	0	2	2
20	4	92	32	60	0	4	4
21	8	120	72	48	0	8	8
22	16	96	96	0	1	15	15
23	30	3	3	0	30	0	0
24	1	3	1	2	1	0	0
25	1	4	1	3	1	0	0

運用:

1. 微分方程:solve separable differential equation
2. 線性代數:least square solution

Theorem:If A is an m×n matrix with linearly independent column vectors,then for every m×1 matrix b,the linear system Ax=b has a unique least squares solution. This solution is given by  $x = (A^T A)^{-1} A^T b$

Lynx and Hares model:

$$\begin{cases} H' = a_1 H - a_2 H L \\ L' = -b_1 L + b_2 H L \end{cases} \text{ 其中 } a_1, a_2, b_1, b_2 \text{ 為參數}$$

Solve equation:

$$\frac{dL}{dH} = \frac{(-b_1 + b_2 H)L}{(a_1 - a_2 L)H} \Rightarrow \frac{(a_1 - a_2 L)dL}{L} = \frac{(-b_1 + b_2 H)dH}{H}$$

$$\Rightarrow \int \left( \frac{a_1}{L} - a_2 \right) dL = \int \left( \frac{-b_1}{H} + b_2 \right) dH$$

$$\Rightarrow a_1 \ln L - a_2 L + b_1 \ln H - b_2 H = C$$

$$\Rightarrow [\ln L \quad -L \quad \ln H \quad -H] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = C$$

由左邊的實驗數據，先算出25代的ln L、-L、ln H、-H後，

依序擺進上式的[ln L -L ln H -H]中，得出一個25×4的矩陣A

$$\Rightarrow \underbrace{A}_{25 \times 4} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = C$$

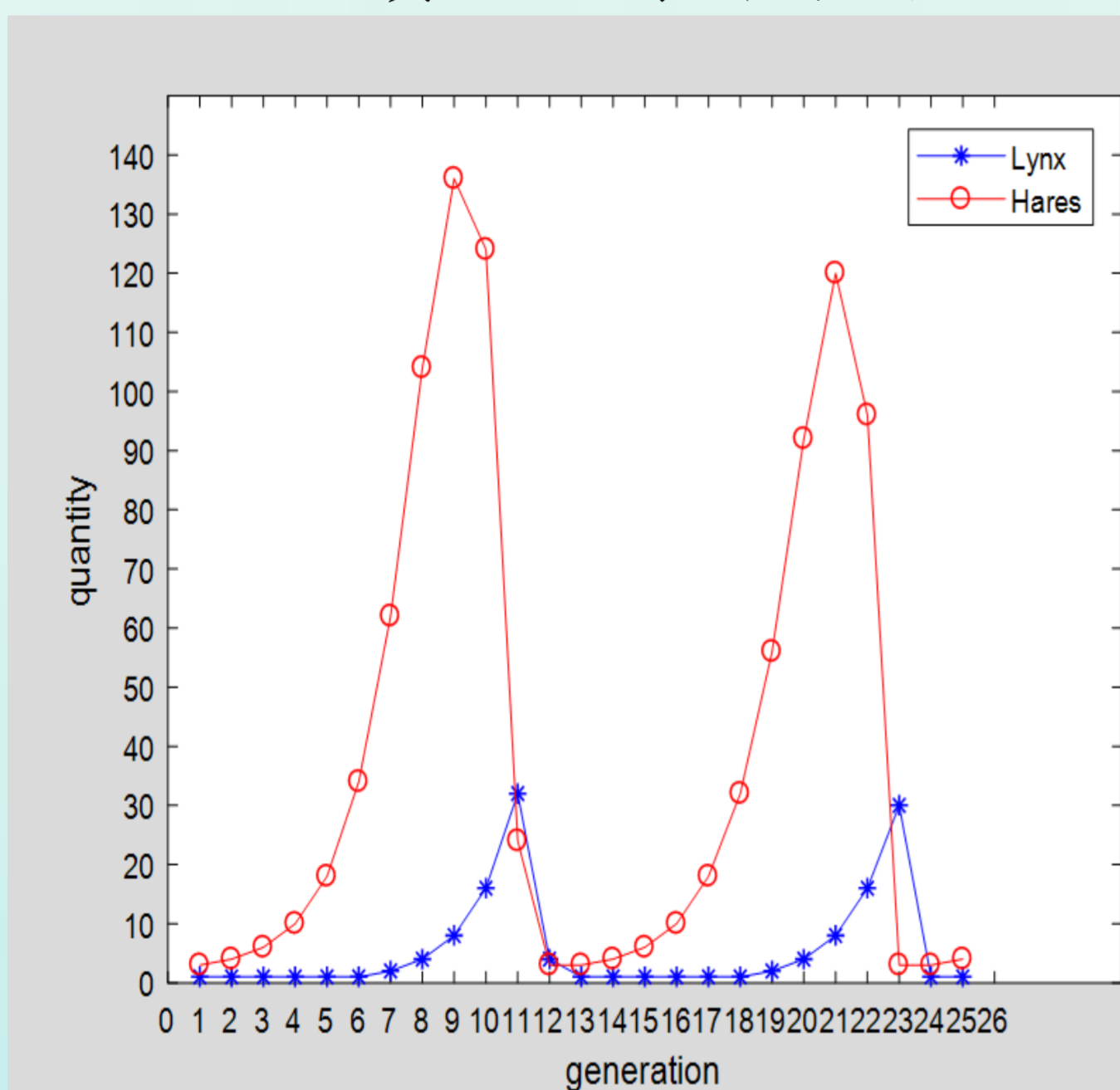
設C為entries皆為1.62的25 × 1向量

運用matlab算出矩陣A的 reduced row echelon form，得出矩陣A有4個pivots，換句話說即矩陣A的行空間維度為4，所以矩陣A的4個行向量為線性獨立。

以左側的定理為基礎，用matlab算出  $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$  的唯一解為  $\begin{bmatrix} 0.6229 \\ 0.0596 \\ 0.8488 \\ 0.0286 \end{bmatrix}$ 。

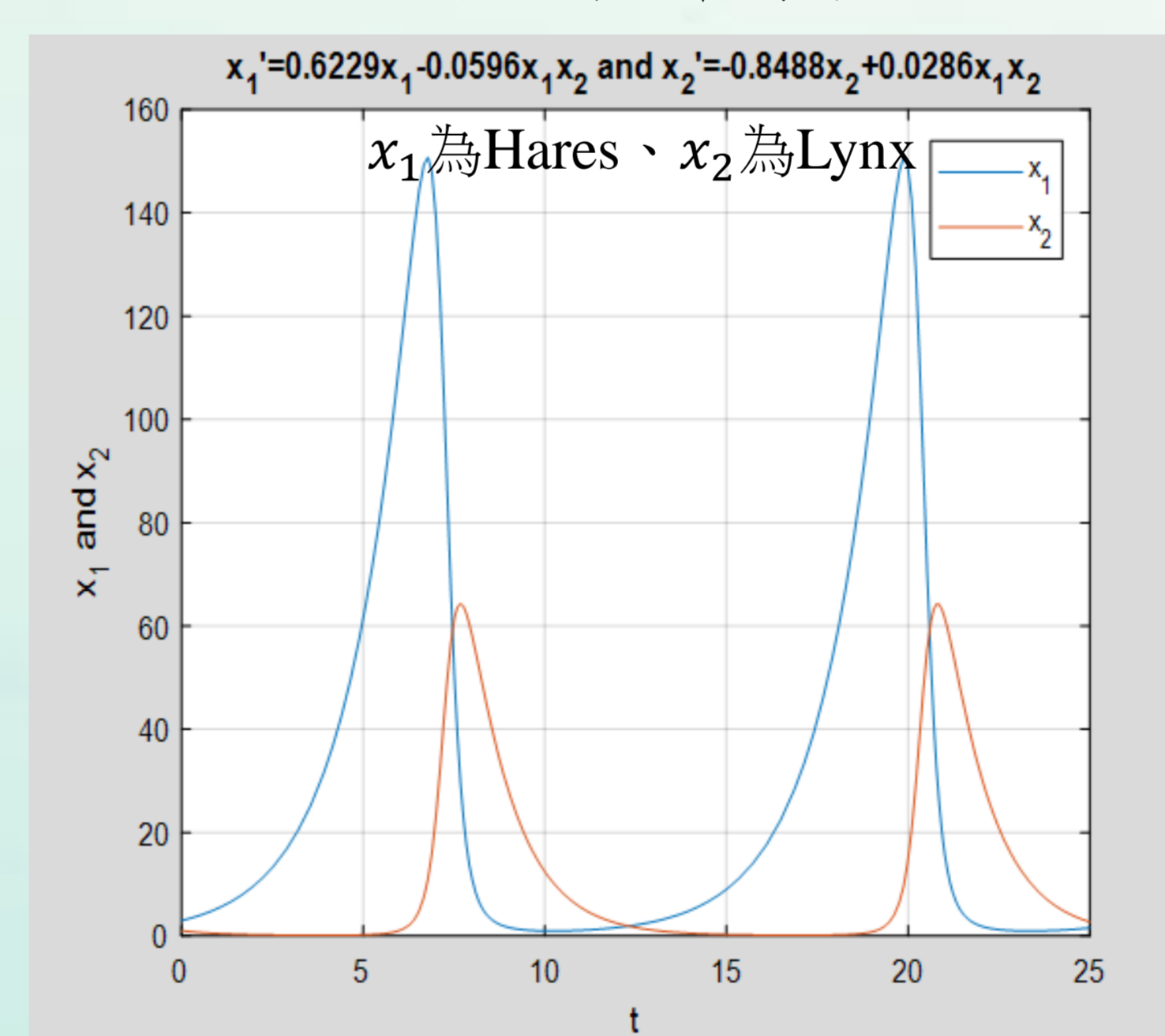
## Conclusions

### 實驗數據折線圖



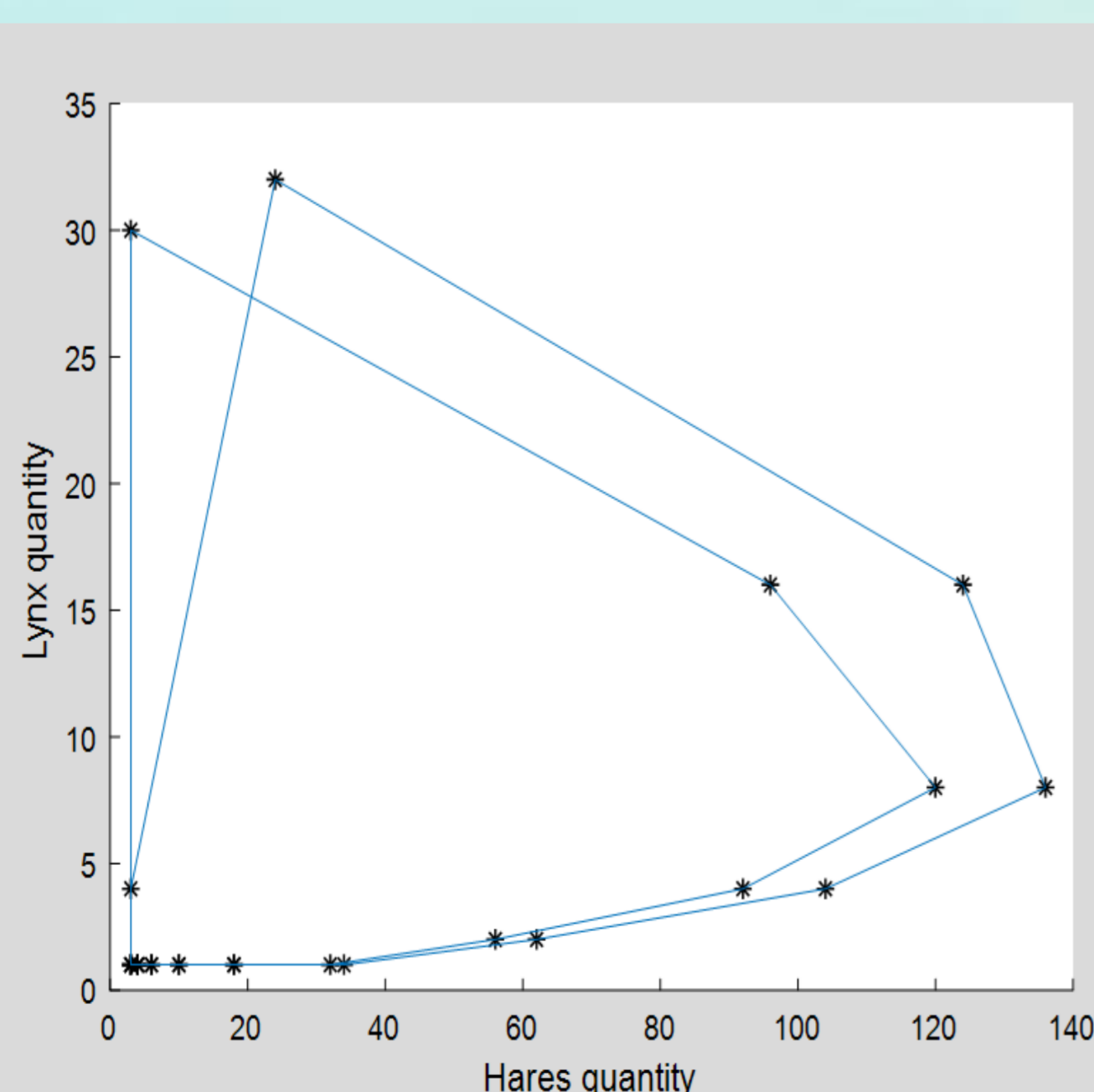
Code:  
x=1:1:25;  
a=[1 1 1 1 1 1 2 4 8 16 32 4 1  
1 1 1 1 1 2 4 8 16 30 1 1];  
b=[3 4 6 10 18 34 62 104  
136 124 24 3 3 4 6 10 18 32  
56 92 120 96 3 3 4];  
plot(x,a,'-b',x,b,'-or');  
axis([0,30,0,150])  
set(gca,'XTick',[0:1:26])  
set(gca,'YTick',[0:10:140])  
legend('Lynx','Hares');  
xlabel('generation')  
ylabel('quantity')

### 微分方程解圖形

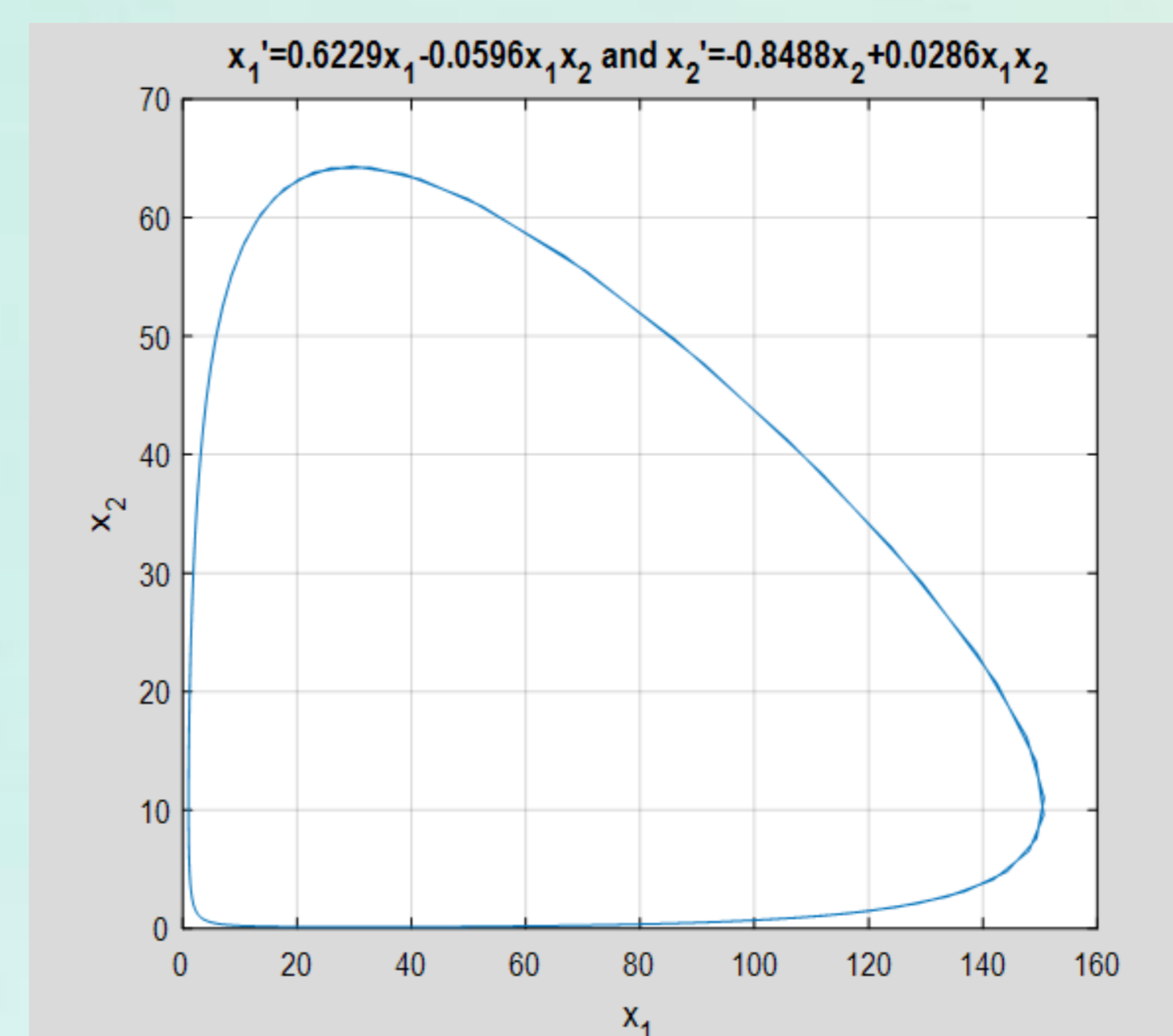


先建立mfile  
function xprime=F(t,x)  
xprime=zeros(2,1);  
xprime(1)=(0.5768-0.0552\*x(2))\*x(1);  
xprime(2)=(-0.7859+0.0264\*x(1))\*x(2);

Code:  
[t,x]=ode45('F',[0,25],[3;1]);  
plot(t,x)  
title('x\_1''=0.6229x\_1-0.0596x\_1x\_2  
and x\_2''=-0.8488x\_2+0.0286x\_1x\_2')  
xlabel('t')  
ylabel('x\_1 and x\_2')  
legend('x\_1','x\_2')  
grid



Code:  
x=[3 4 6 10 18 34 62 104 136 124  
24 3 3 4 6 10 18 32 56 92 120 96 3  
3 4];  
y=[1 1 1 1 1 1 2 4 8 16 32 4 1 1 1 1  
1 1 2 4 8 16 30 1 1];  
scatter(x,y,'k \*')  
line(x,y)  
xlabel('Hares quantity')  
ylabel('Lynx quantity')



Code:  
plot(x(:,1),x(:,2))  
grid  
title('x\_1''=0.6229x\_1-0.0596x\_1x\_2  
and x\_2''=-0.8488x\_2+0.0286x\_1x\_2')  
xlabel('x\_1')  
ylabel('x\_2')

由微分方程解可以看出解圖形與實驗數據一樣具有週期性的變化，能利用微分方程模型進行未來物種數量的預測、模擬。

## References

Elementary Linear Algebra with Supplement Applications

Murray Mathematical Biology 2nd Edition

Differential Equations Metric version、<https://www.youtube.com/watch?v=rpliEjGRbUA&feature=youtu.be>